4° ARGOMENTO: $\boxed{\text{FUNZIONI DI 3 VARIABILI}}$ $\boxed{\text{CURVE NELLO SPAZIO}}$ $\boxed{\text{INTEGRALE CURVILINEO}}$

Definizione (funzione di 3 variabili) - Una funzione reale di tre variabili reali è una legge $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni terna ordinata di numeri reali $(x,y,z) \in D$ uno ed un solo numero reale denotato con $f(x,y,z)$. L'insieme D è detto dominio di f.

Come al solito se il dominio non è specificato, allora

$$\mathrm{dom} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) \text{ è ben definita}\}.$$

ESEMPI • $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ $\quad \mathrm{dom} f = \mathbb{R}^3$

• $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad \mathrm{dom} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

• $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ $\quad \mathrm{dom} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \neq 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0)\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\ z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3 \setminus \text{asse } z$

Definizione (grafico) - Se $f : \mathrm{dom} f \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una funzione di 3 variabili, si dice GRAFICO di f il seguente insieme:

$$\mathrm{graf}\, f = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z) \in \mathrm{dom} f \text{ e } w = f(x,y,z)\}.$$

Risulta $\mathrm{graf}\, f \subset \mathbb{R}^4$ e diventa impossibile disegnarlo.

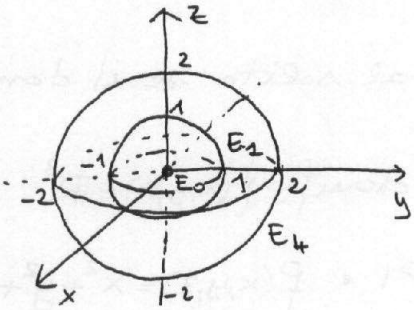
<u>Definizione</u> (INSIEME di LIVELLO) Data una funzione $f: \mathrm{dom} f \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $K \in \mathbb{R}$, si dice insieme di livello K della funzione f l'insieme

$$E_K = \{(x,y,z) \in \mathrm{dom} f : f(x,y,z) = K\}$$

ESEMPI • $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ $\quad E_K = \emptyset$ se $K<0$

$E_0 = \{(0,0,0)\}$ $\quad E_K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = K\}$ se $K>0$

cioè E_K è la superficie sferica di $C(0,0,0)$ e $R = \sqrt{K}$ $\quad$ se $K \to +\infty$ $\; R \to +\infty$

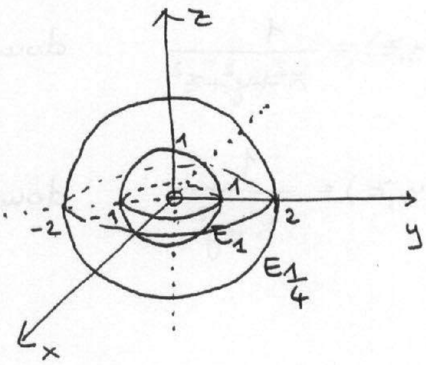


• $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

$E_K = \emptyset$ se $K \le 0$

$E_K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} : \underbrace{x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{K}}_{\text{Sup. sferica di } C(0,0,0)\ R=\frac{1}{\sqrt{K}}}\}$ se $K>0$

se $K \to +\infty$ $\; R \to 0$, se $K \to 0^+$ $\; R \to +\infty$

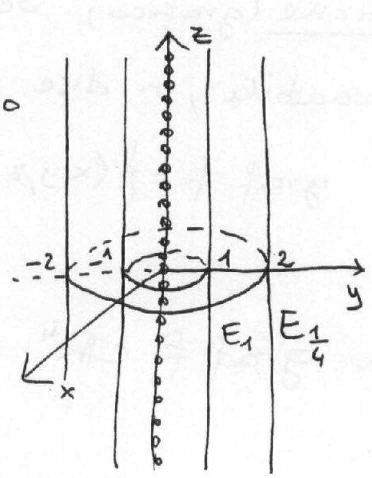


• $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ $\quad E_K = \emptyset$ se $K \le 0$

$E_K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{asse } z : x^2+y^2 = \frac{1}{K}\}$ se $K>0$

superficie cilindrica di asse l'asse z e $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$

se $K \to +\infty$ $\; R \to 0$, se $K \to 0^+$ $\; R \to +\infty$



<u>Definizione</u> (palla aperta o intorno circolare). Dati $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ e $\delta>0$ si dice <u>palla aperta</u> (o intorno circolare) di centro (x_0,y_0,z_0) e raggio δ l'insieme

$$B_\delta(x_0,y_0,z_0)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\right\}$$

(cioè la sfera di $C(x_0,y_0,z_0)$ e raggio δ APERTA).

<u>Definizione</u> ($\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)=\ell\in\mathbb{R}$). Siano $f:\mathrm{dom}f\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una funzione di tre variabili e (x_0,y_0,z_0) un punto di accumulazione del $\mathrm{dom}f$ (cioè $\forall\delta>0$ $B_\delta(x_0,y_0,z_0)\cap(\mathrm{dom}f\setminus\{(x_0,y_0,z_0)\})\neq\emptyset$)

Allora

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)=\ell \quad (\ell\in\mathbb{R})$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall(x,y,z)\in\mathrm{dom}f\setminus\{(x_0,y_0,z_0)\}\ (x,y,z)\in B_\delta(x_0,y_0,z_0)\Rightarrow|f(x,y,z)-\ell|<\varepsilon.$$

<u>Definizione</u> (FUNZIONE CONTINUA). Siano $f:\mathrm{dom}f\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una funzione di tre variabili e (x_0,y_0,z_0) un punto del $\mathrm{dom}f$.

Si dice che f è CONTINUA in (x_0,y_0,z_0) se e solo se

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall(x,y,z)\in\mathrm{dom}f\ (x,y,z)\in B_\delta(x_0,y_0,z_0)\Rightarrow|f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)|<\varepsilon.$$

Se f è continua in ogni punto di un insieme $E\subset\mathrm{dom}f$, allora si dice che f è continua (o di classe C^0) su E e si scrive $f\in C^0(E)$.

<u>PROPOSIZIONE</u>. Siano $f:\mathrm{dom}f\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una funzione di tre variabili e $(x_0,y_0,z_0)\in\mathrm{dom}f$. Se (x_0,y_0,z_0) è anche punto di accumulazione del $\mathrm{dom}f$, allora

$$f \text{ è continua in } (x_0,y_0,z_0) \iff \lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0).$$

<u>Definizione</u> (f derivabile in un punto, gradiente di f, f derivabile, f di classe C^1) -

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di tre variabili definita su un aperto A e sia $(x_0,y_0,z_0) \in A$.

Si dice che f è <u>derivabile rispetto a x</u> in (x_0,y_0,z_0) se esiste finito $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$.

Si dice che f è <u>derivabile rispetto a y</u> in (x_0,y_0,z_0) se esiste finito $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)$.

Si dice che f è <u>derivabile rispetto a z</u> in (x_0,y_0,z_0) se esiste finito $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0,z_0+h)-f(x_0,y_0,z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)$.

Si dice che f è derivabile in (x_0,y_0,z_0) se esistono finite le tre derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)$.

Le derivate parziali formano il GRADIENTE di f (che è un vettore) $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \right)$.

Si dice che f è <u>derivabile in A</u> se f è derivabile in ogni $(x,y,z) \in A$.

La funzione f si dice di classe C^1 su A (e si scrive $f \in C^1(A)$) se $f \in C^0(A)$, f è derivabile in A e le tre derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ sono funzioni continue in A.

<u>Definizione</u> (DERIVATA DIREZIONALE) Sia $f: \text{dom} f \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di tre variabili e sia (x_0, y_0, z_0) un punto interno al dom f. Data una direzione $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ in $\mathbb{R}^3$ ($|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = 1$) si dice che <u>f è derivabile in (x_0, y_0, z_0) nella direzione $\vec{v}$</u> se $\exists\, a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} = a.$$

Il valore $a = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0, z_0)$ si dice DERIVATA DIREZIONALE di f in (x_0, y_0, z_0) nella direzione $\vec{v}$.

<u>Definizione</u> (funzione differenziabile) - Sia $f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di tre variabili definita su un aperto A e sia $(x_0, y_0, z_0) \in A$. La funzione f si dice <u>differenziabile in (x_0, y_0, z_0)</u> se $\exists\, a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\right)$$

per $(x, y, z) \to (x_0, y_0, z_0)$.

Si dice che f è <u>differenziabile in A</u> se f è differenziabile in ogni $(x, y, z) \in A$.

<u>Conseguenze</u>: Se f è differenziabile in (x_0, y_0, z_0) allora

① f è continua in (x_0, y_0, z_0)

② f è derivabile in (x_0, y_0, z_0) e risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = a \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = b \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = c$$

③ f è derivabile in (x_0,y_0,z_0) in ogni direzione $\vec{v}$

e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0,z_0) = \langle \nabla f(x_0,y_0,z_0), \vec{v} \rangle$.

④ L' IPERPIANO TANGENTE esiste in (x_0,y_0,z_0) ed ha equazione

$$w = f(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0).$$

Non si tratta più di un piano in quanto un'eq.ne del tipo $w = ax+by+cz$ in $\mathbb{R}^4$ definisce un sottospazio di dimensione 3 (in generale $n-1$).

CURVE NELLO SPAZIO

Definizione (CURVA nello SPAZIO). Si dice CURVA (nello SPAZIO) un'applicazione CONTINUA $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dove I è un INTERVALLO di $\mathbb{R}$ e $\gamma(t)$ è il punto di coordinate $(x(t), y(t), z(t))$. Le equazioni che definiscono le coordinate (x,y,z) in funzione del parametro t

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I$$

sono le EQUAZIONI PARAMETRICHE della curva.

Definizione (CURVA CHIUSA). Una curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ si dice chiusa se $I = [a,b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$.

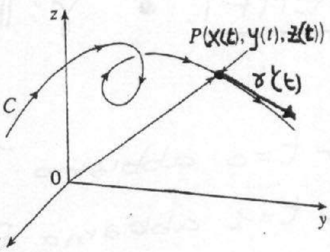
OSS. $\gamma(a) = (x(a), y(a), z(a)) = P_{in}$

$\gamma(b) = (x(b), y(b), z(b)) = P_{fin}$.

Definizione (VETTORE TANGENTE) Sia $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva e sia $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ il punto del sostegno di γ corrispondente all'istante di tempo $t_0 \in I$. Se le tre funzioni $x(t), y(t)$, e $z(t)$ sono derivabili in t_0 e $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq (0,0,0)$ allora il vettore

$$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

risulta TANGENTE alla curva γ nel punto P_0.



La retta tangente alla curva γ in $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ ha equazione:

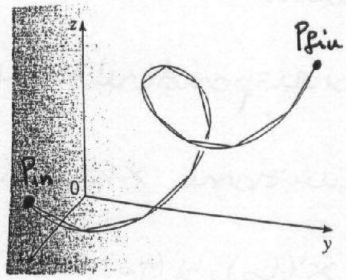
- equazione vettoriale: $P = P_0 + t\gamma'(t_0) \quad t \in \mathbb{R}$
- equazioni parametriche: $\begin{cases} x = x_0 + t x'(t_0) \\ y = y_0 + t y'(t_0) \\ z = z_0 + t z'(t_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Definizione (CURVA di classe C^1) Una curva $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ si dice di classe C^1 se le funzioni $x(t), y(t)$, e $z(t)$ sono di classe C^1 (cioè continue, derivabili e con derivate $x'(t), y'(t)$, e $z'(t)$ continue).

Anche per le curve nello spazio la LUNGHEZZA si definisce come estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte nella curva. Se la curva è di classe C^1 vale inoltre il seguente teorema

<u>TEOREMA</u> (lunghezza di una curva di classe C^1).

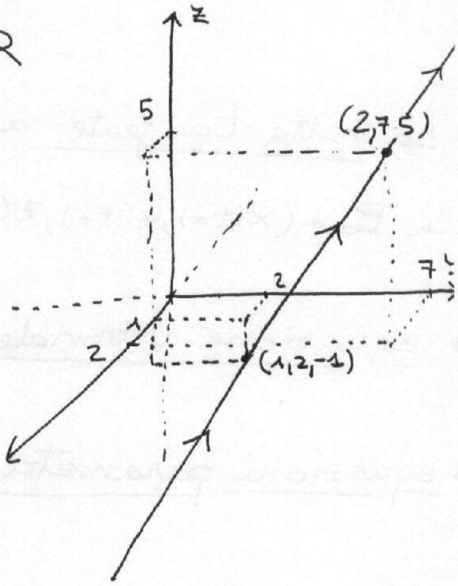
Se $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ è una curva di classe C^1, allora



1) $L(\gamma)<+\infty$

2) $L(\gamma)=\displaystyle\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$

<u>ESEMPI</u> • $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ $\begin{cases}x=1+t\\ y=2+5t\\ z=-1+6t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$



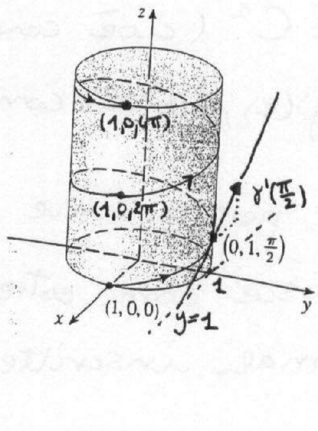
per $t=0$ abbiamo $P_0=(1,2,-1)$

per $t=1$ abbiamo $P_1=(2,7,5)$

in generale $P=(1,2,-1)+t(1,5,6)$ quindi si tratta della retta per il punto $(1,2,-1)$ con direzione $(1,5,6)$ (oppure per i 2 punti P_0 e P_1 nel verso da P_0 a P_1)

La retta si può anche scrivere come intersezione dei due piani $\begin{cases}y=2+5(x-1)\\ z=-1+6(x-1)\end{cases}$ $\begin{cases}y=5x-3\\ z=6x-7.\end{cases}$

• $\gamma:[0,4\pi]\to\mathbb{R}^3$ $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\operatorname{sen} t\\ z=t\end{cases}$ $t\in[0,4\pi]$



$P_{in}=(1,0,0)$ $P_{fin}=(1,0,4\pi)$

$t=\frac{\pi}{2}$ $(0,1,\frac{\pi}{2})$ $t=\pi$ $(-1,0,\pi)$ $t=\frac{3}{2}\pi$ $(0,-1,\frac{3}{2}\pi)$

$t=2\pi$ $(1,0,2\pi)$ $t=\frac{5}{2}\pi$ $(0,1,\frac{5}{2}\pi)$ $t=3\pi$ $(-1,0,3\pi)$

$t=\frac{7}{2}\pi$ $(0,-1,\frac{7}{2}\pi)$

Poichè $x^2+y^2=\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t=1$, la curva appartiene alla superficie del cilindro di base $x^2+y^2=1$ e asse l'asse z.
Il punto (x,y,z) si proietta sul punto $(x,y,0)$ che si muove in verso antiorario sulla circonferenza $x^2+y^2=1$ nel piano (x,y). Poichè $z=t$ la curva si avvita a spirale attorno al cilindro, innalzandosi al crescere di t.
Questa curva si chiama ELICA CILINDRICA (ne sono considerati 2 giri)

<u>Vettore tangente e retta tangente in $(0,1,\frac{\pi}{2})$</u>

il punto $P_0=(0,1,\frac{\pi}{2})$ corrisponde a $t=\frac{\pi}{2}$ $\left(\begin{cases}\cos t=0\\ \operatorname{sen} t=1\\ t=\frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\right)$

$\gamma'(t)=(-\operatorname{sen} t,\cos t,1)$

$\boxed{\gamma'(\frac{\pi}{2})=(-1,0,1)}$ → vettore tangente in P_0 : il vettore $\vec{v}=(-1,0,1)$ nel punto $(0,1,\frac{\pi}{2})$ si trova nel piano $y=1$ (parallelo al piano (x,z))

<u>retta tangente in P_0</u>

eq.^{ne} vettoriale $P=(0,1,\frac{\pi}{2})+t(-1,0,1)$

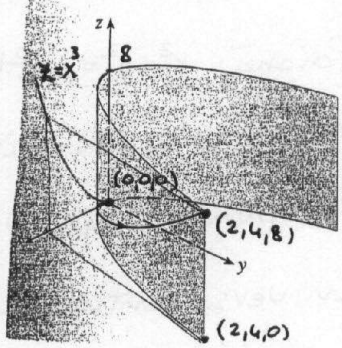
eq.^{ni} parametriche $\begin{cases}x=-t\\ y=1\\ z=\frac{\pi}{2}+t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

come intersezione di due piani $\begin{cases}y=1\\ x+z-\frac{\pi}{2}=0\end{cases}$.

<u>Lunghezza di γ</u>

$$L(\gamma)=\int_0^{4\pi}|\gamma'(t)|\,dt=\int_0^{4\pi}\sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2+(\cos t)^2+1^2}\,dt=$$
$$=\int_0^{4\pi}\sqrt{\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t+1}\,dt=\int_0^{4\pi}\sqrt{2}\,dt=\boxed{4\sqrt{2}\,\pi}$$

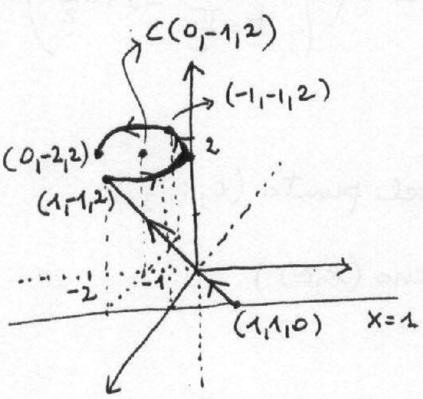
- $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^3$ $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \quad t \in [0,2] \\ z = t^3 \end{cases}$



$P_{in} = (0,0,0)$ $P_{fin} = (2,4,8)$

Essendo $y = x^2$ (eliminando il parametro t tra le prime due equazioni) il punto (x,y,z) si proietta su $(x,y,0)$ che si muove sulla parabola $y = x^2$. Essendo $z = t^3$ la curva si innalza al crescere di t. Il punto (x,y,z) si proietta sul piano (x,z) in $(x,0,z)$ con $z = x^3$.

- $\gamma : [-1, \frac{3}{2}\pi] \to \mathbb{R}^3$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1-2t \quad t \in [-1,0] \\ z = 2t+2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \cos t \\ y = -1+\operatorname{sen} t \quad t \in]0, \frac{3}{2}\pi]. \\ z = 2 \end{cases}$



<u>1° tratto</u>

$P_{in} = (1,1,0)$

$P_{fin} = (1,-1,2)$

la curva giace sul piano $x = 1$

$2t = -1-y \Rightarrow z = -1-y+2$

$\begin{cases} x = 1 \\ y+z-1 = 0 \end{cases}$ questa è una retta (si poteva anche vedere dalle eq.ni che si trattava della retta per $(1,-1,2)$ con direzione $(0,-2,2)$. Allora il 1° tratto è un <u>segmento</u>

<u>2° tratto</u>

$P_{in} = (1,-1,2)$

$P_{fin} = (0,-2,2)$

la curva giace sul piano $z = 2$

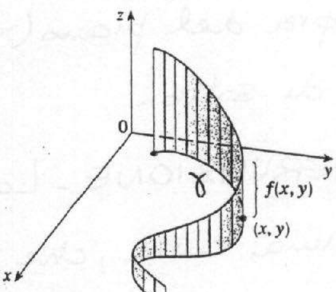
sono $\frac{3}{4}$ di circonferenza di $C(0,-1,2)$ percorsi in verso antiorario

$t = \frac{\pi}{2}$ $(0,0,2)$

$t = \pi$ $(-1,-1,2)$

INTEGRALE di una FUNZIONE su una CURVA

Consideriamo una funzione continua di due variabili $f: \text{dom} f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e una curva $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ con sostegno contenuto nel dominio di f. Per funzioni di una variabile $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ si definisce l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ e se $f(x) \geq 0$ tale integrale rappresenta l'area della regione piana compresa tra il grafico di f e l'asse delle x. Vogliamo ora definire l'integrale della funzione $f(x,y)$ sulla curva γ in modo che se $f(x,y) \geq 0$ l'integrale rappresenti l'area della superficie la cui base è il sostegno di γ e la cui altezza in corrispondenza al punto (x,y) è data da $f(x,y)$.



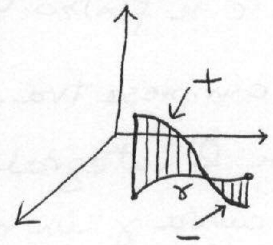
Per definire questo integrale dobbiamo leggere $f(x,y)$ sulla curva γ e integrare rispetto al tempo, tenendo però conto della velocità di percorrenza (infatti, come già osservato a pag. 40 e seguenti, se si percorre γ con velocità >1 il grafico risulta schiacciato e l'area della superficie appare inferiore rispetto al suo valore reale, mentre se la velocità è <1 il grafico risulta allargato e l'area della superficie appare superiore al suo valore reale).

<u>Definizione</u> (integrale di una funzione su una curva).
Sia $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva <u>di classe C^1</u> e sia $f: \text{dom} f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione <u>definita</u> e <u>continua</u> sul sostegno di γ. Allora si dice INTEGRALE di f su γ il numero

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

OSSERVAZIONE - Si noti che se $f(x,y) = c > 0$ si ritrova giustamente che $\int_\gamma f(x,y) = \int_\gamma c = c\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt = c\,L(\gamma)$.

OSSERVAZIONE. L'integrale di una funzione su una curva non dipende né dalla parametrizzazione, né dal verso di percorrenza di γ. La funzione integranda ha lo stesso segno di f e quindi l'integrale di f su γ è positivo quando f è positiva e negativo quando f è negativa. Se f non ha segno costante allora l'integrale misura come positiva l'area della superficie al di sopra del piano (x,y) e come negativa quella al di sotto.



OSSERVAZIONE - La definizione di integrale di una funzione su una curva, che è data per curve di classe C^1, si estende facilmente alle curve C^1 a tratti. Una curva $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ ($\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$) si dice C^1 a tratti se l'intervallo $[a,b]$ si può dividere in un numero finito di intervalli su ciascuno dei quali γ risulta di classe C^1. Se $[a,b]$ si divide in k intervalli e chiamiamo $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ i tratti C^1 di γ allora l'integrale di f su γ è la somma degli integrali di f su $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$:

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \dots + \int_{\gamma_k} f.$$

OSSERVAZIONE. In alcuni testi l'integrale di una funzione su una curva viene detto anche integrale curvilineo di 1ª specie per distinguerlo dall'integrale di un campo vettoriale su una curva che viene invece detto integrale curvilineo di 2ª specie.

ESEMPI • Calcolate $\int_\gamma xy$ dove γ è il 1° quarto della circonferenza di centro $(0,0)$ e $R=2$ (da $(2,0)$ a $(0,2)$).

$$\gamma \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t\in[0,\tfrac{\pi}{2}] \qquad \int_\gamma xy = \int_0^{\pi/2} 2\cos t \cdot 2\,\mathrm{sen}\,t \cdot 2\,dt = 4\left[\mathrm{sen}^2 t\right]_0^{\pi/2} = 4$$

• Le coordinate del BARICENTRO di una curva γ sono date da $B=(x_B,y_B)$, $x_B = \frac{1}{L(\gamma)}\int_\gamma x$, $y_B = \frac{1}{L(\gamma)}\int_\gamma y$.

Determinate il baricentro della curva dell'esempio precedente.

$$L(\gamma)=\pi \qquad x_B = \frac{1}{\pi}\int_\gamma x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2\cos t\cdot 2\,dt = \frac{4}{\pi}\left[\mathrm{sen}\,t\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}$$

$$y_B = \frac{1}{\pi}\int_\gamma y = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2\,\mathrm{sen}\,t\cdot 2\,dt = \frac{4}{\pi}\left[-\cos t\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}$$

$B=\left(\frac{4}{\pi},\frac{4}{\pi}\right)$.

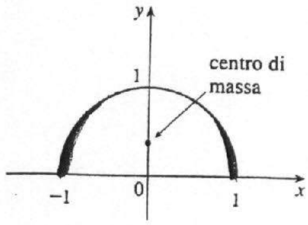
• Se consideriamo un filamento di densità di massa $\rho(x,y)$ disposto come la curva γ, allora la massa del filamento è data da $m=\int_\gamma \rho(x,y)$ e le coordinate del centro di massa del filo sono $C=(x_C,y_C)$ con

$$x_C = \frac{1}{m}\int_\gamma x\rho(x,y), \quad y_C = \frac{1}{m}\int_\gamma y\rho(x,y).$$

Il baricentro di una curva γ è il centro di massa di un filamento disposto come la curva γ di densità $\rho(x,y)\equiv 1$.

Determinate il centro di massa di un filamento di densità $\rho(x,y)=1-y$ disposto sulla semicirconferenza $x^2+y^2=1$, $y\geq 0$ (lo spessore del filamento aumenta avvicinandosi verso la base).

$$\gamma \begin{cases} x=\cos t \\ y=\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t\in[0,\pi] \qquad m=\int_\gamma 1-y = \int_0^\pi (1-\mathrm{sen}\,t)\,dt =$$



$$= \left[t+\cos t\right]_0^\pi = \pi-1-1=\pi-2$$

$\boxed{m=\pi-2}$

$$x_C = \frac{1}{\pi-2}\int_\gamma x(1-y) = \frac{1}{\pi-2}\int_0^\pi \cos t(1-\operatorname{sen} t)\,dt = \frac{1}{\pi-2}\left[\operatorname{sen} t + \frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{\pi-2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \boxed{x_C = 0}$$ (si poteva dedurre anche direttamente per simmetria)

$$\boxed{y_C} = \frac{1}{\pi-2}\int_\gamma y(1-y) = \frac{1}{\pi-2}\int_0^\pi \operatorname{sen} t(1-\operatorname{sen} t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi-2}\left[-\cos t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi-2}\left(1-\frac{\pi}{2}+1\right) = \boxed{\frac{4-\pi}{2(\pi-2)}}.$$

In modo analogo a quanto fatto per funzioni di 2 variabili, se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ è una curva di classe C^1 e $f : \operatorname{dom} f \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una funzione definita e continua nel sostegno di γ, si definisce l'integrale di f su γ come

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

ESEMPIO • Calcolate $\int_\gamma y \operatorname{sen} z$ dove γ è l'elica circolare definita da $\gamma \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ (1 giro).

$$\int_\gamma y \operatorname{sen} z = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{sen} t \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \boxed{\sqrt{2}\,\pi}$$

ESERCIZI (2ª parte del corso)

CURVE NELLO SPAZIO

Disegnate il sostegno delle seguenti curve con il verso di percorrenza, scrivendo anche l'equazione della retta tangente nei punti a fianco indicati. Calcolate la lunghezza di γ.

1) ES. 1.22 retta tg per $t=\frac{1}{2}$ $\left(L(\gamma)=\frac{5}{3}\right)$

2) ES. 1.28 retta tg per $t=1$ $(L(\gamma)=8)$

3) ES. 1.29 retta tg in $P_0=(1,3,6)$ $(L(\gamma)=50)$

4) ES. 1.30 retta tg in $P_0=(-4,0,4\pi)$ $(L(\gamma)=8\sqrt{2}a)$

5) $\begin{cases} x=2-2\cos t \\ y=1+2\,\mathrm{sen}\,t \\ z=2t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ retta tg in $P_0=(4,1,2\pi)$ $(L(\gamma)=4\pi\sqrt{2})$

6) $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\,\mathrm{sen}\,t \\ z=-\sqrt{3}t \end{cases}$ $t\in[0,4\pi]$ $(L(\gamma)=8\sqrt{3}\pi)$

7) ES. 1.32 retta tg per $t=\frac{\pi}{2}$ $(L(\gamma)=2\sqrt{2}\pi)$

8) $\begin{cases} x=t \\ y=\mathrm{sen}\,t \\ z=1 \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ NO LUNGHEZZA

9) $\begin{cases} x=-t^2 \\ y=t \\ z=-2 \end{cases}$ $t\in[0,2]$ NO $L(\gamma)$

10) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=1 \\ z=\mathrm{sen}\,t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ $(L(\gamma)=2\pi)$

11) $\begin{cases} x=-1 \\ y=t \\ z=t^3 \end{cases}$ $-1\le t\le 1$ NO $L(\gamma)$.

12) $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+5t \\ z=-1+6t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ (NO $L(\gamma)$)

13) come 12) ma per $t\in[-1,0]$ $(L(\gamma)=\sqrt{67})$

14) $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=\cos t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ (NO $L(\gamma)$)

14)[bis] Associate le equazioni parametriche ai grafici I-VI motivando la scelta

5. $x = \cos 4t, \quad y = t, \quad z = \sin 4t$

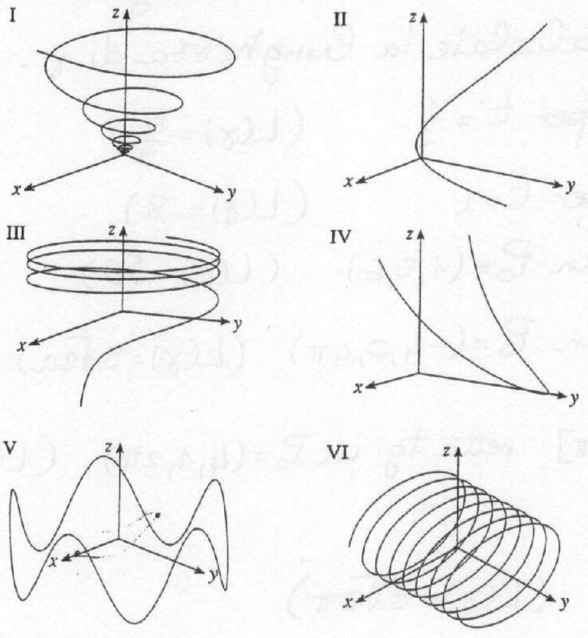
6. $x = t, \quad y = t^2, \quad z = e^{-t}$

7. $x = t, \quad y = 1/(1 + t^2), \quad z = t^2$

8. $x = e^{-t} \cos 10t, \quad y = e^{-t} \sin 10t, \quad z = e^{-t}$

9. $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \sin 5t$

10. $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \ln t \quad t > 0$



15) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^4 \\ z=t^6 \end{cases}$ $t\in[0,2]$ (NO $L(\gamma)$)

16) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\operatorname{sen} t \\ z=\operatorname{sen}(2t) \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ (NO $L(\gamma)$) retta tangente in $P_0=(1,0,0)$

17) $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=e^{-t} \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ retta tg per $t=0$ (NO $L(\gamma)$).

Scrivete le equazioni parametriche di una curva avente come sostegno l'insieme assegnato e disegnatene il sostegno.

1) insieme che si ottiene intersecando il cilindro $x^2+y^2=1$ con il piano $y+z=2$.
2) insieme che si ottiene intersecando il cilindro $x^2+y^2=4$ con la superficie $z=xy$ (che è una sella).
3) insieme che si ottiene intersecando il cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ con il piano $z=1+y$.

Mostrare che la curva di equazioni parametriche $\gamma\begin{cases} x=t^2 \\ y=1-3t \\ z=1+t^3 \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ passa per $(1,4,0)$ e per $(9,-8,28)$, ma non per $(4,7,-6)$.

Mostrare che la curva di equazioni parametriche $\gamma\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\operatorname{sen} t \\ z=t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ ha sostegno sul cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$; disegnate poi il sostegno di γ con il verso di percorrenza.

Mostrare che la curva di equazioni parametriche $\gamma\begin{cases} x=\operatorname{sen} t \\ y=\cos t \\ z=\operatorname{sen}^2 t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ ha come sostegno l'intersezione delle superfici $x^2+y^2=1$ e $z=x^2$. Disegnate il sostegno di γ con il verso di percorrenza.

INTEGRALE DI UNA FUNZIONE SU UNA CURVA

Calcolate gli integrali delle seguenti funzioni sulle curve a fianco indicate. Disegnate il sostegno delle curve.

1) $\int_\gamma (2+x^2y)$ γ = metà superiore della circonferenza di $C(0,0)$, $R=3$ R. $6\pi+54$

2) $\int_\gamma 2x$ $\gamma:[0,2]\to\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases} t\in[0,1]$ $\begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases} t\in[1,2]$ R. $\frac{5\sqrt{5}-1}{6}+2$

3) $\int_\gamma y$ $\gamma \begin{cases} x=t^2 \\ y=t \end{cases} t\in[0,2]$ R. $\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-1)$

4) $\int_\gamma \frac{xy^4}{64}$ γ = metà destra della circonferenza $C(0,0)$, $R=4$ R. $\frac{128}{5}$

5) $\int_\gamma x^2z$ γ = segmento da $(0,6,-1)$ a $(4,1,5)$ R. $\frac{56}{3}\sqrt{77}$

6) $\int_\gamma \frac{xy^3}{5}$ $\gamma \begin{cases} x=4\,\mathrm{sen}\,t \\ y=4\cos t \\ z=3t \end{cases} t\in[0,\pi/2]$ R. 64

Calcolate il baricentro delle seguenti curve.

1) $\gamma = 3/4$ della circonferenza di $C(0,0)$, $R=2$ (da $(2,0)$ a $(0,-2)$). R. $B\left(-\frac{4}{3\pi},\frac{4}{3\pi}\right)$

2) $\gamma:[-1,2]\to\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x=t \\ y=t+1 \end{cases} t\in[-1,0]$ $\begin{cases} x=t \\ y=-t+1 \end{cases} t\in[0,2]$ R. $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$

Trovate massa e centro di massa di un filamento con densità costante K, disposto lungo la semicirconferenza $x^2+y^2=4$, $x\geq 0$. $C_{massa}=\left(\frac{4}{\pi},0\right)$

Trovate massa e centro di massa di un filamento con densità $\rho(x,y) = x+y$ disposto lungo il quarto di cerchio $x^2+y^2=r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. R. Cmassa $\left(\frac{\pi+2}{8}r, \frac{\pi+2}{8}r\right)$

Trovate il baricentro della curva γ di equazioni parametriche $\begin{cases} x=t \\ y=\cos t \\ z=\sin t \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$. Disegnate il sostegno di γ e il suo baricentro. R. $B(\pi,0,0)$

Potete svolgere gli esercizi del libro 6.2.1, 6.2.3, 6.2.4, 6.2.6 di cui sono dati i risultati, e anche

$\boxed{6.1}$ R. $\frac{5\sqrt{5}}{24}+\frac{1}{120}$ $\boxed{6.2}$ R. $\frac{1}{3}\left((1+e^2)^{3/2}-2\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}+\frac{e^3}{4}-\frac{1}{4e}$

$\boxed{6.3}$ R. 16π $\boxed{6.4}$ R. $18e^{\sqrt[3]{9}}+2e$ $\boxed{6.7}$ R. 74

$\boxed{6.9}$ R. $B\left(\frac{e^{2\pi}+1}{5(e^{\pi}-1)}, -2\frac{e^{2\pi}+1}{5(e^{\pi}-1)}\right)$ $\boxed{6.10}$ R. $B(0,0,k\pi)$

FUNZIONI di 3 variabili $f: \mathrm{dom} f \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a valori reali

Determinare e disegnare, se possibile, il dominio delle seguenti funzioni

1) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-1}$ $2)_A$ $f(x,y,z) = xyz$ $2)_B$ $f(x,y,z) = \dfrac{x+z}{y^2+z^2}$

3) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+2y^2+3z^2}{x^2+y^2+z^2}$ $4)_A$ $f(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $4)_B$ $f(x,y,z) = -\dfrac{1}{x^2+y^2}$

5) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2-z}$ 6) $f(x,y,z) = \dfrac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$

7) $f(x,y,z) = \sqrt{x+y+z}$ 8) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$

$9)_A$ $f(x,y,z) = \log(z-x^2-y^2)$ $9_B)$ $f(x,y,z) = \dfrac{yz}{z^2+x^2}$

10) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2-2}$ 11) $f(x,y,z) = z \log(9-x^2-y^2)$

12) $f(x,y,z) = \dfrac{\log(z-\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{2-x^2-y^2-z}}$

Date le seguenti funzioni, determinatene il dominio e calcolate le derivate a fianco indicate.

1) $f(x,y,z) = y e^{xy} \log z$ $\nabla f(x,y,z)$ $\nabla f(0,1,2)$

2) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(3x+yz)$ tutte le derivate prime e le derivate 2^e

3) $f(x,y,z) = xy^2z^3 + 3yz$ $\nabla f(x,y,z)$ $\nabla f(1,2,1)$

---

i) $f(x,y,z) = \log(x+2y+3z)$ $\nabla f(x,y,z)$

) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y+z}$ $\nabla f(3,2,1)$

$f(x,y,z) = e^{xyz}$ $\nabla f(x,y,z)$ $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial y}(x,y,z)$

7) $f(x,y,z) = x \operatorname{sen}(yz)$ $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,3,0)$ $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

8) $f(x,y,z) = xy^2z^3$ $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,-2,1)$ $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

MATRICE JACOBIANA, DIVERGENZA e ROTORE

Calcolate la matrice jacobiana delle seguenti funzioni nei punti a fianco indicati.

1) $\vec{F}(x,y) = (yx^2, 3x-y^3)$ $J\vec{F}(x,y)$ $J\vec{F}(1,1)$ $\det J\vec{F}(1,1)$

2) $\vec{F}(x,y,z) = (xyz, 2(xy+xz+yz))$ $J\vec{F}(x,y)$ $J\vec{F}(-1,1,-1)$

3) $\vec{F}(x,y) = (ye^{x^2}, \operatorname{sen}(x+y), \cos(x\cdot y))$ $J\vec{F}(x,y)$

Esercizi del libro 4.43, 4.44, 4.45, 4.47, 4.48, 4.49.

Disegnare i seguenti insiemi nello spazio, spiegando di che cosa si tratta e disegnando anche le proiezioni sui piani coordinati.

1) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq z\leq 4\}$

2) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 1,\ -1\leq z\leq 3\}$

3) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq z\leq -(x^2+y^2)+6,\ x^2+y^2\leq 4\}$

4) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq x\leq 2,\ -1\leq y\leq 1,\ 0\leq z\leq e^y\}$

5) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -3\leq z\leq -\sqrt{x^2+y^2}\}$

6) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq 2(x^2+y^2)+4\}$

7) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 5-(x^2+y^2)\}$

8) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -2\leq x\leq 2,\ y^2-1\leq z\leq 0\}$

9) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -2\leq x\leq 2,\ -1\leq z\leq y^2-1,\ -1\leq y\leq 1\}$

10) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -\sqrt{4-x^2-y^2}\leq z\leq -1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\}$

11) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ 1\leq x^2+y^2\leq e^2,\ 0\leq z\leq \log\sqrt{x^2+y^2}\}$

12) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2\leq 4,\ 0\leq y\leq 2\}$

13) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{5}{2}\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq x^2+y^2+1,\ x^2+y^2\leq 1\}$

14) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}(x^2+y^2)-2\leq z\leq 1-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\}$

15) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq z\leq \sqrt{9-x^2-y^2},\ z\geq 2-\frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}\}$

16) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq x^2+y^2+3,\ x^2+y^2\leq 4\}$

17) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 4,\ z\leq 2+x^2+y^2\}$

18) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3(x^2+y^2)\leq z\leq 1+\sqrt{4(x^2+y^2)}\}$

19) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq y\leq 1,\ 1\leq z\leq e^2,\ z\leq e^x\}$

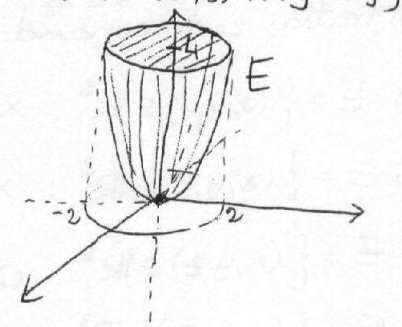
20) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq z\leq 4,\ x^2+y^2\geq 1\}$

21) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 9,\ 0\leq z\leq 4,\ z\geq 5-(x^2+y^2)\}$.

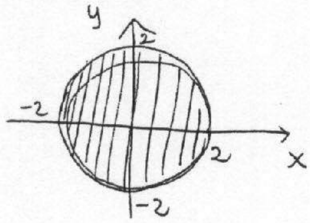
1) $z = x^2 + y^2$ paraboloide $V(0,0,0)$ rivolto verso l'alto $\left(E_K = \{(x,y) : x^2+y^2 = k\}\right)$

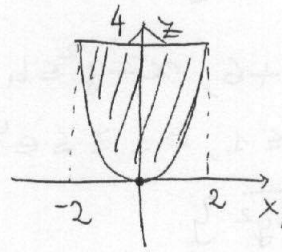
$z = 4$ piano orizzontale

$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = 4$ si intersecano sulla circonf. $C(0,0)$ $R=2$



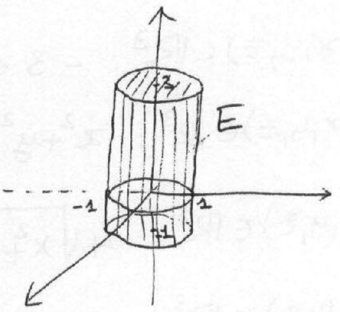
Proiezioni



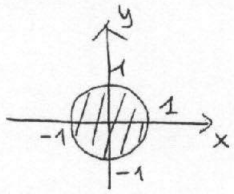


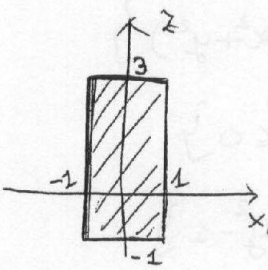
2) $x^2+y^2 = 1$ cilindro di asse l'asse z e $R=1$

$-1 \le z \le 3$



Proiezioni

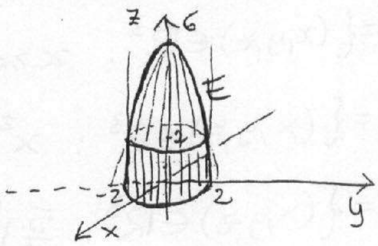




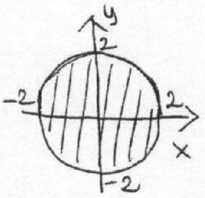
3) $z = -(x^2+y^2)+6$ paraboloide di vertice $V(0,0,6)$ rivolto verso il basso

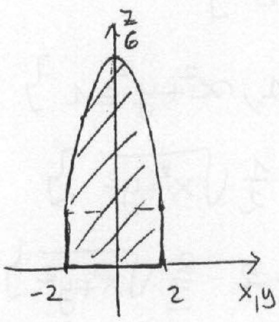
$x^2+y^2 = 4$ cilindro di asse l'asse z e $R=2$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ z = -(x^2+y^2)+6 \end{cases} \Rightarrow z = 2$ il cilindro interseca il paraboloide a quota $z=2$



Proiezioni



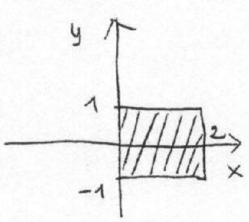


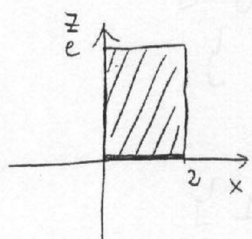
Il paraboloide arriva a piano (x,y) sulla circonf $C(0,0)$ $R=\sqrt{6}$

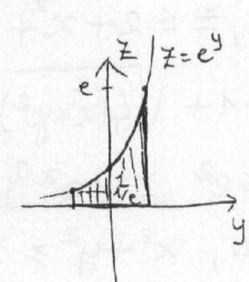
$\begin{cases} z = -(x^2+y^2)+6 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = 6$

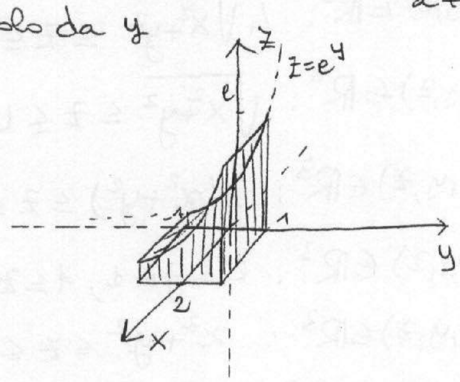
4) $z = e^y$ grafico di $f(x,y) = e^y$ dipendente solo da y sul rettangolo $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$

Proiezioni





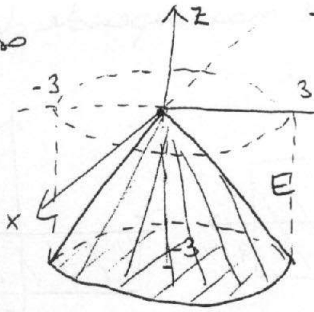




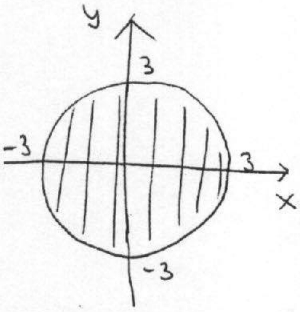
5) $z = -\sqrt{x^2+y^2}$ cono $V(0,0,0)$ rivolto verso il basso

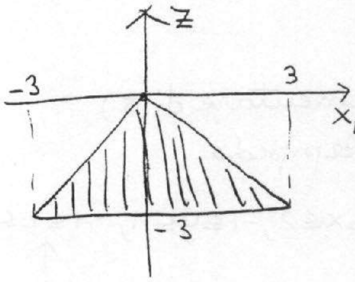
$z=-3$ piano orizzontale

$\begin{cases} z = -\sqrt{x^2+y^2} \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=3$ il cono interseca il piano sulla circonf. $C(0,0)$ $R=3$



Proiezioni

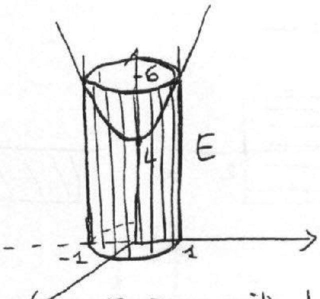




6) $x^2+y^2=1$ cilindro di asse l'asse z e $R=1$

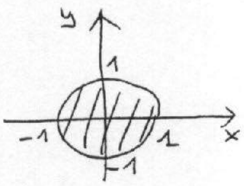
$z = 2(x^2+y^2)+4$ paraboloide di $V(0,0,4)$ rivolto verso l'alto

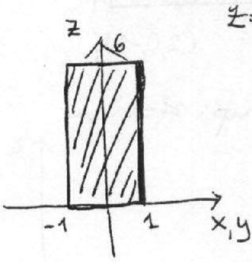
$\begin{cases} z = 2(x^2+y^2)+4 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow z=6$ il cilindro interseca il paraboloide a quota $z=6$



E è un cilindro pieno da cui si toglie la punta del paraboloide (pieno)

Proiezioni





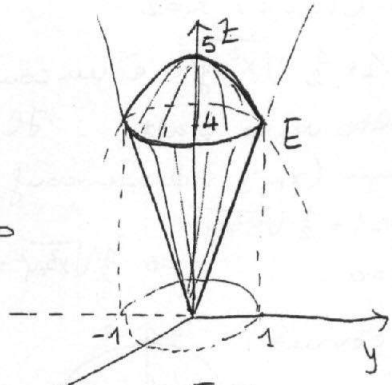
7) $z = 4\sqrt{x^2+y^2}$ cono $V(0,0,0)$ rivolto verso l'alto

$z = 5-(x^2+y^2)$ paraboloide $V(0,0,5)$ rivolto verso il basso

$\begin{cases} z = 4\sqrt{x^2+y^2} \\ z = 5-(x^2+y^2) \end{cases} \Rightarrow 5-(x^2+y^2) = 4\sqrt{x^2+y^2}$

detto $R=\sqrt{x^2+y^2}$ $(R \geq 0)$

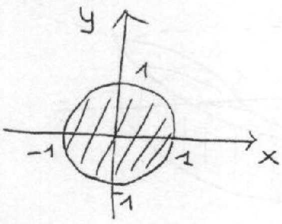
$R^2+4R-5=0 \quad R = \frac{-2\pm3}{1} \to R=1$, $R=-5$ NON ACCETT.

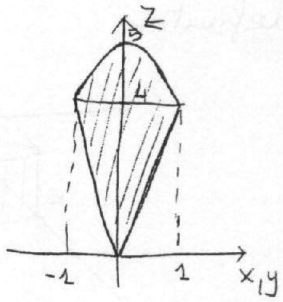


E è un cono gelato

(il cono e il paraboloide si intersecano sulla circonf. $C(0,0)$ $R=1$ a quota $z=4$)

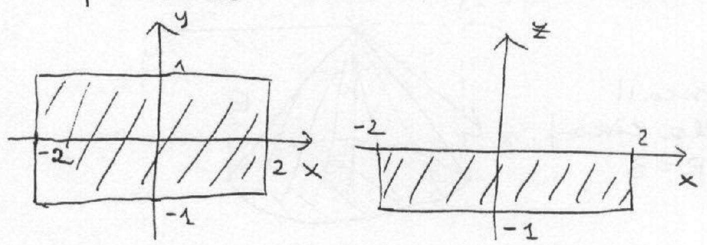
proiezioni

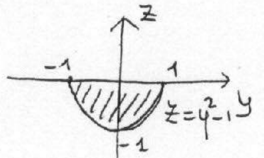


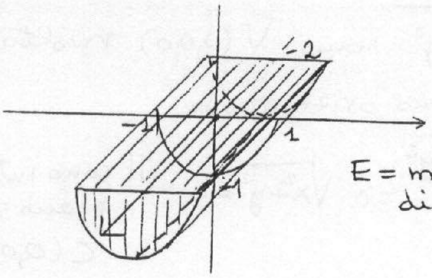


8) $z = y - 1$ non dipende da x

Proiezioni





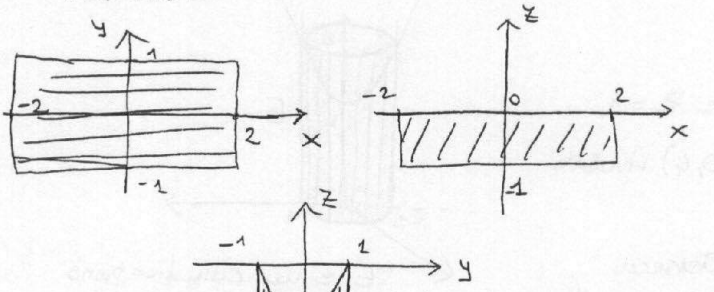


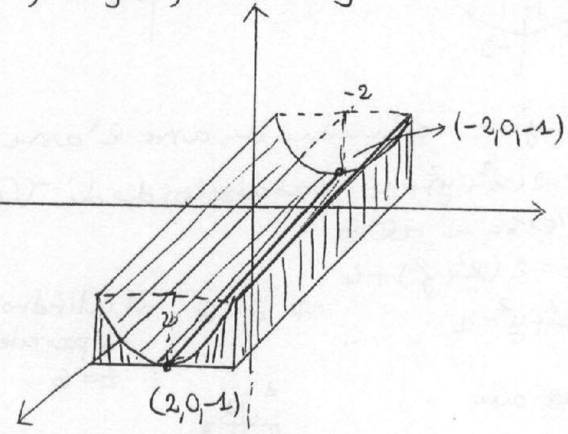
E = mezzo tronco di cilindro pieno

9) È il complementare di 8) nel parallelepipedo

$P = \{(x,y,z) : -2 \le x \le 2, -1 \le y \le 1, -1 \le z \le 0\}$

Proiezioni

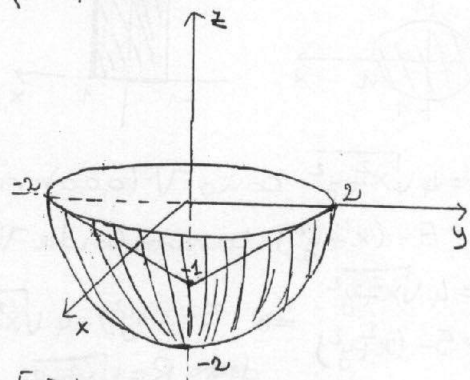




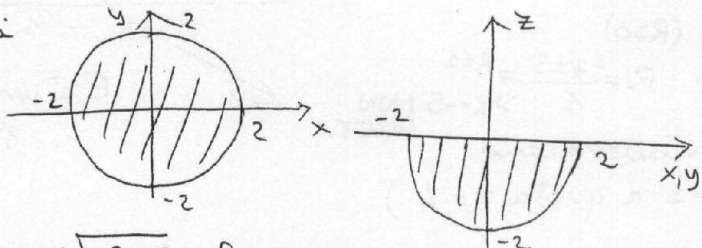
10) $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ è la metà inferiore della sup. sferica di $C(0,0,0)$ $R = 2$

$z = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ è un cono di vertice $(0,0,-1)$ rivolto verso l'alto. Il cono interseca il piano (x,y) sulla circonf $C(0,0)$ $R = 2$

$$\begin{cases} z = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$



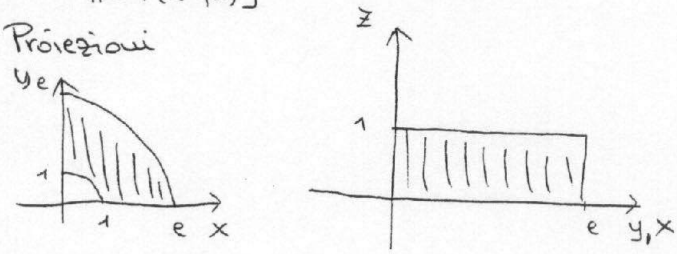
Proiezioni

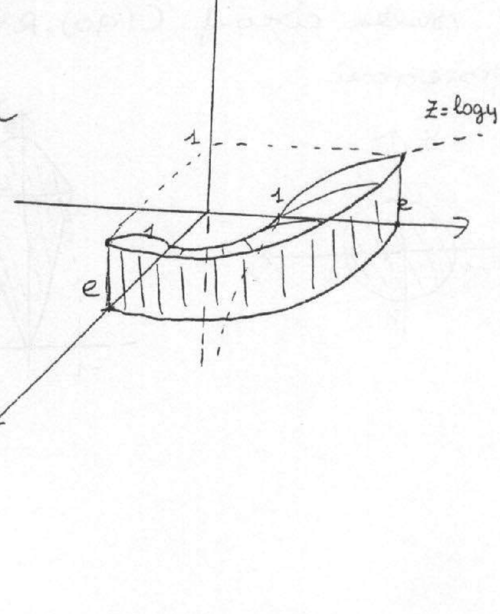


E = la metà sfera da cui si toglie il cono

11) $z = \log\sqrt{x^2+y^2}$ funzione radiale definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

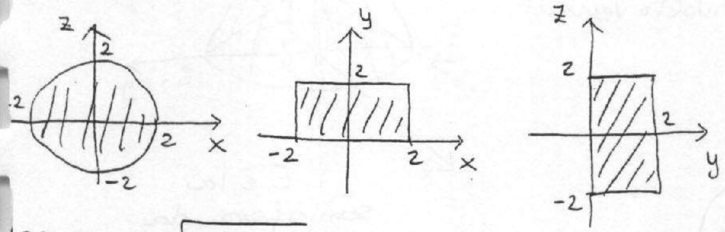
Proiezioni

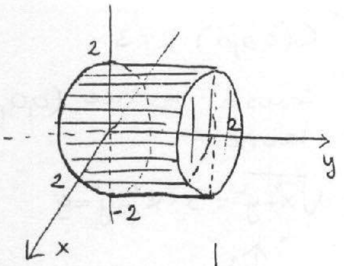




12) $x^2+z^2=4$ cilindro di asse l'asse y, $R=2$

Proiezioni:





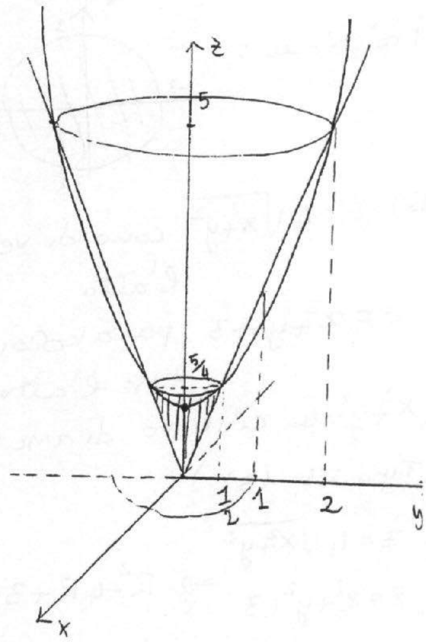
13) $z=\frac{5}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ cono di vertice $(0,0,0)$ rivolto verso l'alto.

$z=x^2+y^2+1$ paraboloide di vertice $(0,0,1)$ rivolto verso l'alto

$x^2+y^2=1$ cilindro di asse l'asse z, $R=1$

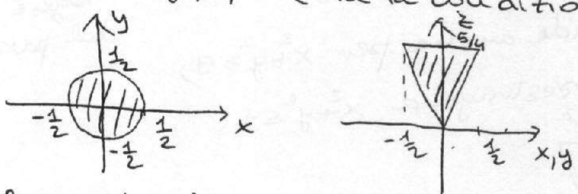
Dobbiamo sapere dove si intersecano cono e paraboloide:

$$\begin{cases} z=\frac{5}{2}\sqrt{x^2+y^2} \\ z=x^2+y^2+1 \end{cases} \quad \text{posto } R=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \quad R^2-\frac{5}{2}R+1=0 \qquad R_1=\frac{1}{2} \quad R_2=2$$



si intersecano sulla circonf. di $C(0,0)$ $R=\frac{1}{2}$ a $z=\frac{5}{4}$ e sulla circonf. di $C(0,0)$ $R=2$ a $z=5$. Il nostro insieme è il cono (pieno) fino a $z=5/4$ da cui si toglie la punta del paraboloide (pieno). Si noti che ci sono punti tra cono e paraboloide su $x^2+y^2\le\frac{1}{4}$ e su $x^2+y^2\ge4$ (ma la condizione $x^2+y^2\le1$ ci restringe ai primi).

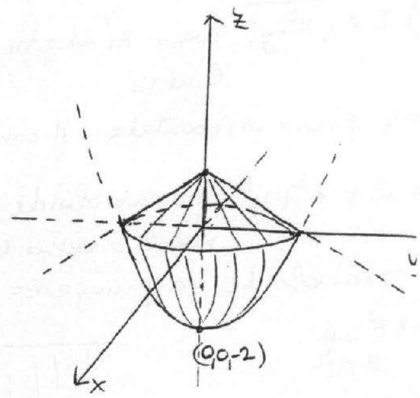
Proiezioni:



14) $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)-2$ paraboloide di vertice $(0,0,-2)$ rivolto verso l'alto

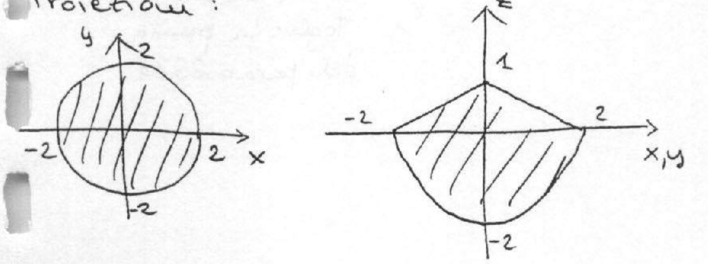
$z=1-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ cono di vertice $(0,0,1)$ rivolto verso il basso

$$\begin{cases} z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)-2 \\ z=1-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}R-3=0 \qquad R_1=2 \quad R_2=-3 \text{ NON ACC.}$$



Cono e paraboloide si intersecano sulla circonf. di $C(0,0)$ $R=2$ a $z=0$

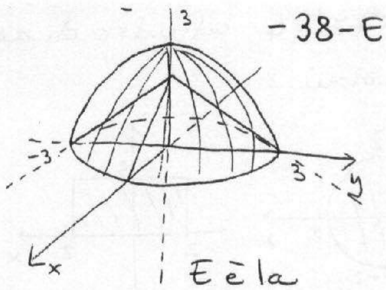
Proiezioni:



15) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ $C(0,0,0)$ $R=3$

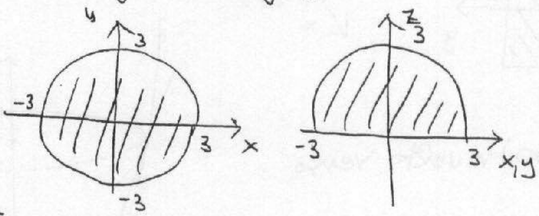
$z=2-\frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ cono di vertice $(0,0,2)$ rivolto verso il basso

$\begin{cases} z=2-\frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2} \\ z=0 \end{cases}$ $\sqrt{x^2+y^2}=3$ $x^2+y^2=9$



E è la semisfera da cui si toglie il cono

Proiezioni:



16) $z=4\sqrt{x^2+y^2}$ cono di vertice $(0,0,0)$ rivolto verso l'alto

$z=x^2+y^2+3$ paraboloide di vertice $(0,0,3)$ rivolto verso l'alto

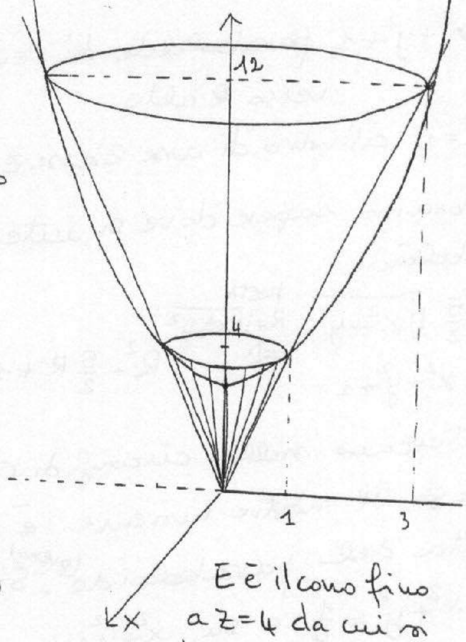
$x^2+y^2=4$ cilindro di asse l'asse z $R=2$

(Tipo ES. 13))

$\begin{cases} z=4\sqrt{x^2+y^2} \\ z=x^2+y^2+3 \end{cases} \Rightarrow R^2-4R+3=0 \quad R_1=1,\ R_2=3$

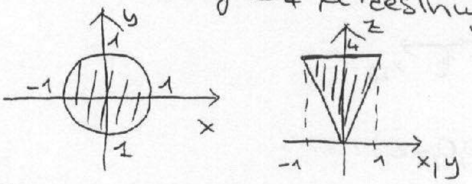
cono e paraboloide si intersecano sulla circonf. di $C(0,0)$ $R=1$ a $z=4$ e sulla circonf. di $C(0,0)$ $R=3$ a $z=12$.

Ci sono punti tra cono e paraboloide anche per $x^2+y^2\geq 9$, ma la condizione $x^2+y^2\leq 4$ si restringe a $x^2+y^2\leq 1$.



E è il cono fino a $z=4$ da cui si toglie la punta del paraboloide.

Proiezioni:

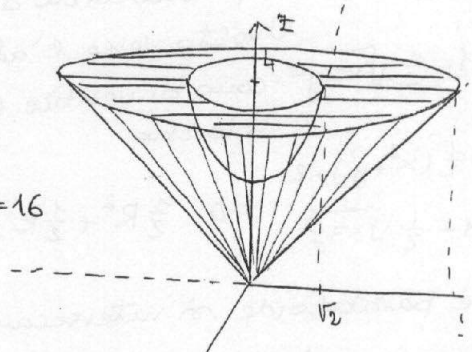


17) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ cono di vertice $(0,0,0)$ rivolto verso l'alto

$z=4$ piano orizzontale, il cono raggiunge $z=4$ su $x^2+y^2=16$

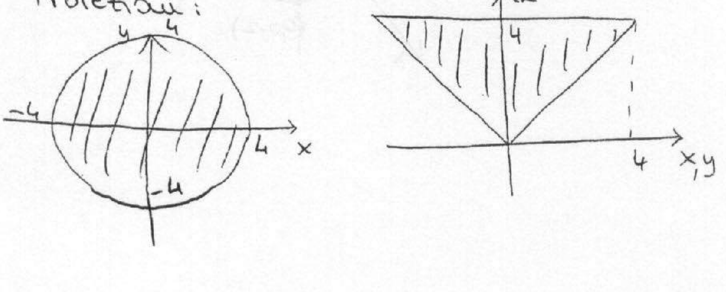
$z=2+x^2+y^2$ paraboloide di vertice $(0,0,2)$ rivolto verso l'alto

il paraboloide raggiunge $z=4$ su $x^2+y^2=2$



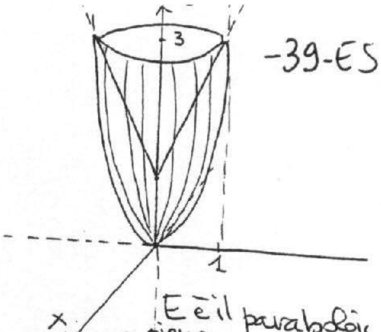
E è il cono fino a $z=4$ da cui si toglie la punta del paraboloide

Proiezioni:



18) $z=3(x^2+y^2)$ ... di vertice (0,0,0) rivolto verso l'alto

$z=1+2\sqrt{x^2+y^2}$ cono di vertice (0,0,1) rivolto verso l'alto

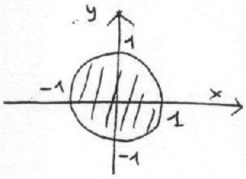


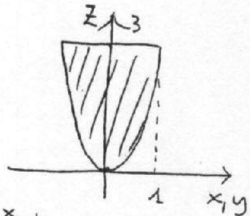
$$\begin{cases} z=3(x^2+y^2) \\ z=1+2\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow 3R^2-2R-1=0 \quad R_1=1 \quad R_2=-\frac{1}{3} \text{ NON ACC}$$

Cono e paraboloide si intersecano nella circonf. di C(0,0) R = 1 a z = 3

E è il paraboloide pieno fino a z=3 da cui si toglie il cono (pieno) (tra z=1 e z=3)

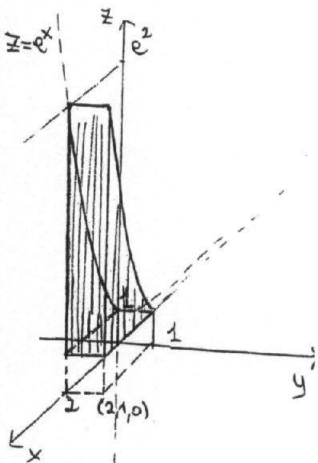
Proiezioni:



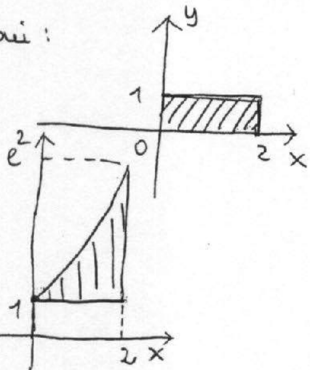


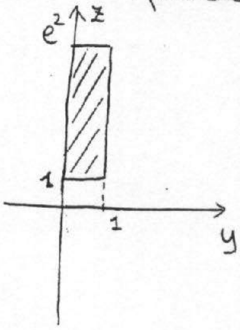
19) $z=e^x$ grafico di $f(x,y)=e^x$ dipendente solo da x

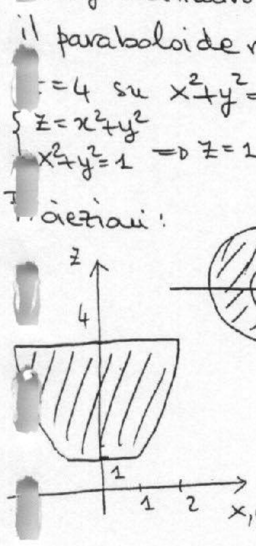
$1 \le z \le e^2 \Rightarrow 0 \le x \le 2$



Proiezioni:



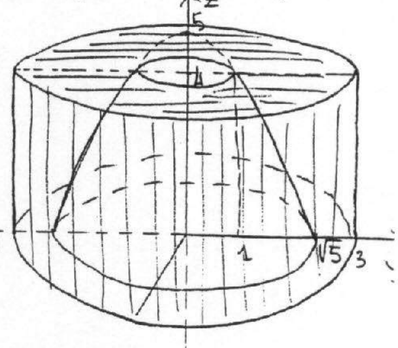




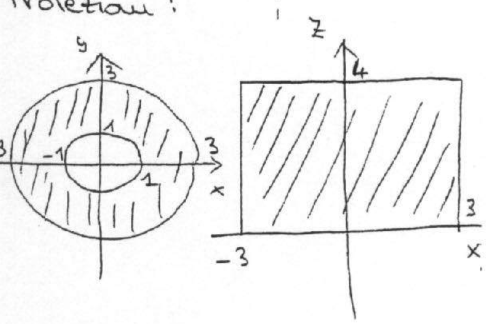
21) $x^2+y^2=9$ cilindro asse = asse z R=3

$z=5-(x^2+y^2)$ paraboloide di vertice (0,0,5) rivolto verso il basso. il paraboloide raggiunge z=0 su $x^2+y^2=5$ e z=4 su $x^2+y^2=1$

E è il cilindro pieno per $0 \le z \le 4$ da cui si toglie il paraboloide pieno (quindi il cilindro è bucato)



Proiezioni:



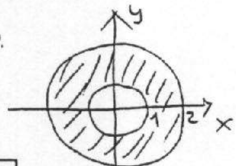
20) $z=x^2+y^2$ paraboloide di vertice (0,0,0) rivolto verso l'alto

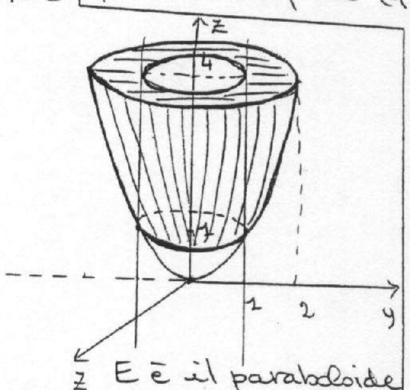
$x^2+y^2=1$ cilindro asse = asse z R=1

il paraboloide raggiunge z=4 su $x^2+y^2=4$

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow z=1$$

Proiezioni:





E è il paraboloide (pieno) tra z=1 e z=4 da cui si toglie il cilindro (pieno) - Allora in E c'è un buco.